

Αλγεβρικές Δομές I (2018-2019)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #4

1. Δείξτε ότι μια ομάδα G έχει πεπερασμένο πλήθος υποομάδων αν και μόνο αν η ομάδα G είναι πεπερασμένη.
2. Ναδειχθεί ότι μια ομάδα G έχει ακριβώς δύο υποομάδες αν και μόνο αν η G είναι κυκλική τάξης p , όπου p πρώτος.
3. Έστω ότι η G είναι κυκλική ομάδα τάξης n . Έστω m ένας θετικός διαιρέτης του n . Δείξτε ότι η G έχει ακριβώς $\phi(m)$ στοιχεία τάξης m , όπου ϕ είναι η συνάρτηση ϕ του Euler.

4. Να βρεθούν οι αριστερές πλευρικές κλάσεις της υποομάδας H στην ομάδα G όταν:

$$H = \langle 5 \rangle = 5\mathbb{Z}, G = \mathbb{Z}, \quad H = \langle 9 \rangle = 9\mathbb{Z}, G = \mathbb{Z}$$

5. Να βρεθούν οι αριστερές πλευρικές κλάσεις της υποομάδας $\langle [6]_{12} \rangle$ στην ομάδα $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ και της $\langle [6]_{12} \rangle$ στην (υπο)ομάδα $\langle [2]_{12} \rangle$ της $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.

6. Θεωρούμε τις ακόλουθες (κυκλικές) υποομάδες της S_3

$$H = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad K = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Να βρεθούν οι δεξιές και αριστερές πλευρικές κλάσεις (δεξιά και αριστερά σύμπλοκα) των υποομάδων H, K στην S_3 .

7. Θεωρούμε την διεδρική ομάδα D_4 τάξης 8. Για κάθε στοιχείο $a \in D_4$ να υπολογίσετε την τάξη της κυκλικής ομάδας $\langle a \rangle$ που παράγεται από το a και τις δεξιές πλευρικές κλάσεις της υποομάδας $\langle a \rangle$ στην D_4 .
8. Θεωρούμε την ομάδα $(\mathbb{Z}_{12}, +)$, και την ομάδα ευθύ γινόμενο $G = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12}$. Έστω H το ακόλουθο υποσύνολο της G :

$$H = \{ ([a]_{12}, [b]_{12}) \in G : 3 \mid a, 3 \mid b \}.$$

Δείξτε ότι το σύνολο H είναι υποομάδα της G και υπολογίστε τον δείκτη $[G : H]$.

9. Έστω ότι $(G, *)$ είναι μια ομάδα και ότι $H \leq G$ είναι μια υποομάδα της. Ναδειχθεί ότι το πλήθος των αριστερών συμπλόκων (πλευρικών κλάσεων) της H στην G ισούται με το πλήθος των δεξιών συμπλόκων (πλευρικών κλάσεων) της H στην G .
10. Έστω ότι $(G, *)$ είναι μια ομάδα, H, K δύο υποομάδες της G και $a, b \in G$. Αν $a * H = b * K$ δείξτε ότι $H = K$.